Lezione 10

GRUPPI DI LIE

Def: M è PARALLELIZZABILE se TM è banale, cioè $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$,

cioè $\exists$ frame.

Oss: M parallelizzabile $\Rightarrow$ orientabile

$TM \cong M \times \mathbb{R}^n \Rightarrow T_pM \cong \mathbb{R}^n$

orient.

$\mathbb{P}^2$ non ori $\Rightarrow$ non parall.

S^2 ori $\Rightarrow$ non parall.

non ha X tangente mai nullo

Es: $\mathbb{R}^n$ è parallelizzabile

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ " " .

aperto

Ex: $\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{k}$ è parallelizzabile

Teo: G di Lie $\Rightarrow$ G è parallelizzabile ($\Rightarrow$ G è orientabile) dim: $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $T_eG = \mathfrak{g}$

$$\begin{array}{ccc} v_1 & & v_n \\ \rightsquigarrow & & \rightsquigarrow \\ X_1 & & X_n \end{array} \qquad X_i(g) = (dL_g)_e(v_i)$$

è un frame.

$$X_1(g), \dots, X_n(g) \text{ base di } T_gG \ \forall g \in G$$

ok sono $\overset{\shortparallel}{(dL_g)_e(v_1)}, \dots, (dL_g)_e(v_n)$

Cor: S^2 non ha struttura di gruppo di Lie

S^1 è gr di Lie $\qquad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$

S^3 è gr di Lie $\qquad S^3 = \{z \in \mathbb{Q} \mid \|z\| = 1\}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^4 & & \mathbb{R}^8 \\ & & \wr\shortparallel & & \wr\shortparallel & & \wr\shortparallel \\ \mathbb{R} & \subseteq & \mathbb{C} & \subseteq & \mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{O} \\ 1 & & 2 & & 4 & & 8 \end{array}$$

$$\mathbb{Q} = \{\underset{z}{\underbrace{a + bi + cj + dk}} \mid a, b, c, d\} \qquad \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

S^n parallelizzabili? $\quad n$ pari $\to$ NO

S^1, S^3, S^7 sono solo queste (teorema) $\quad (S^5$ no$)$

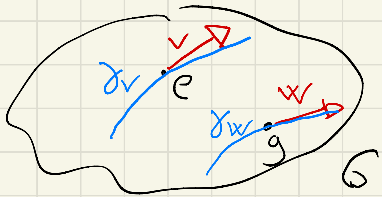
Lie, Lie

MAPPA ESPONENZIALE

G Lie $\quad v \in T_eG = \mathfrak{g} \quad v \dashrightarrow X$ inv. a sx

Prop: X è completo

dim:



$0 \in I_v$

$\gamma_v : I_v \to G$ curva integrale

$\gamma_v(0) = e$

$\gamma_v'(t) = X(\gamma_v(t))$

$I_v \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \ni 0$

Questo ε va bene in ogni $g \in G$

$w = X(g) = (dL_g)_e(v)$

$$\gamma_w = g \cdot \gamma_v \qquad I_w = I_v \Rightarrow I_w \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$\square$

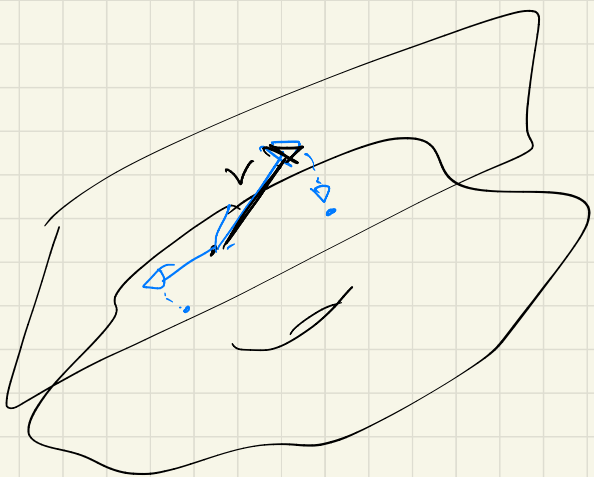
$v \in \mathfrak{g} \rightarrow X$ è completo

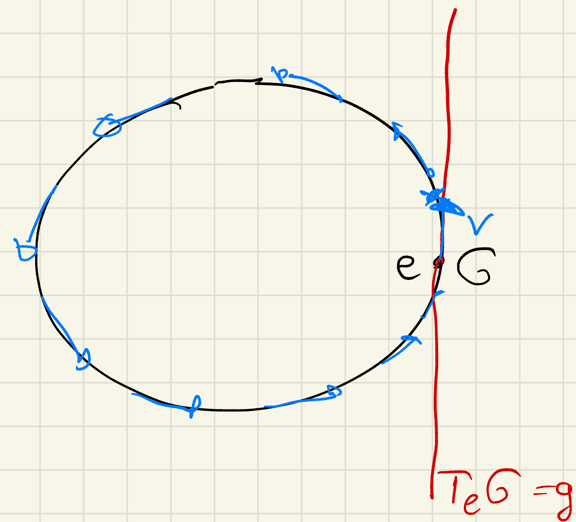
$\rightarrow \Phi_X$ FLUSSO $\quad \Phi_v = \Phi_X$

Def: La MAPPA ESPONENZIALE è

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$
$$v \longmapsto \Phi_v(e, 1)$$

è liscia (dip. liscia dai dati iniziali)





Oss: $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow \lambda v \in \mathfrak{g}$

$$X \dashrightarrow \lambda X \qquad \text{Dunque: } \gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$$

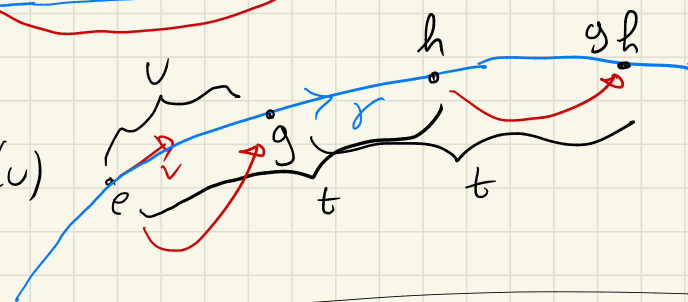
Oss: $\exp(0) = e$

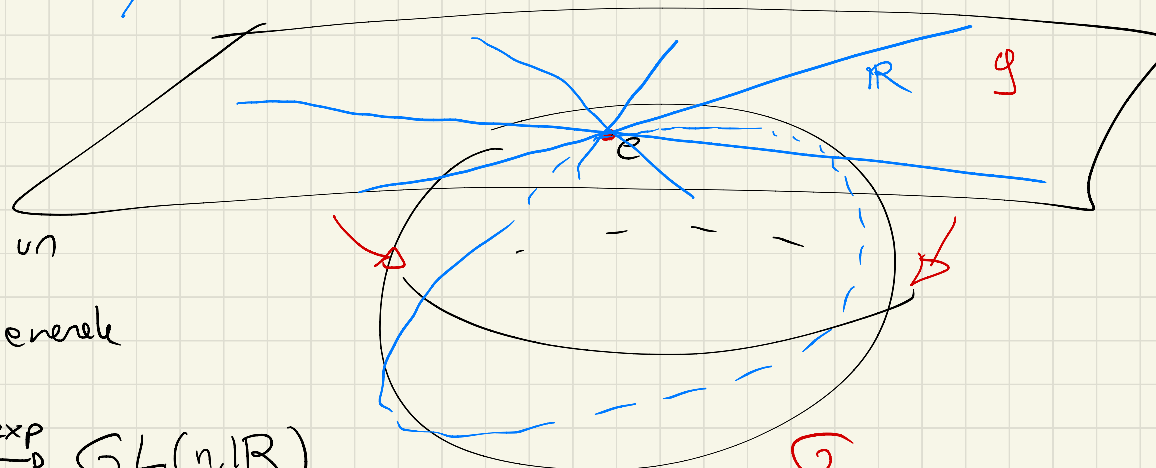
Prop: $\forall v \neq 0,\ v \in \mathfrak{g}$ $\boxed{\gamma_v : \mathbb{R} \to G}$ è omomorfismo di gruppi di Lie

dim:

$$\gamma_v(t+u) \overset{?}{=} \gamma_v(t) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{g}}{\gamma_v(u)}$$

facile





Warning: exp non è un omomorfismo in generale

Esempio: $\underset{\overset{\shortparallel}{M(n)}}{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})} \xrightarrow{\exp} GL(n,\mathbb{R})$

$$A \longmapsto e^A$$

dim: $\alpha_A(t) = e^{tA}$ curva in $GL(n,\mathbb{R})$

$A \in gl(n,\mathbb{R}) = M(n)$

$\alpha_A'(t) = e^{tA} \cdot A = \alpha_A(t) A$

$\alpha_A(t)$ è curva integrale del campo associato a A $\square$

$$o(n) \xrightarrow{exp} O(n) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto e^A$$

Ex: $dexp_e : g \to g$ è l'identità

$exp : g \to G$

Cor: exp è diffeo loc.

$\exists\, U(0) \xrightarrow[exp]{\sim} V(e)$ è una parametrizzazione

$U(0) \subseteq g \cong \mathbb{R}^n$

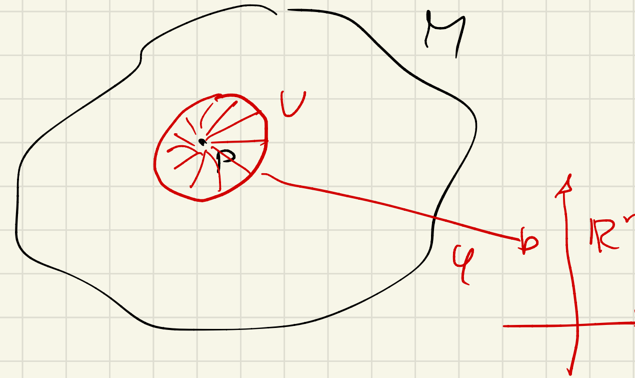
$exp(g+h)$ $\quad$ $exp(g) \cdot exp(h)$

INTORNO TUBOLARE

$N^n \subseteq M^m$ sottovarietà

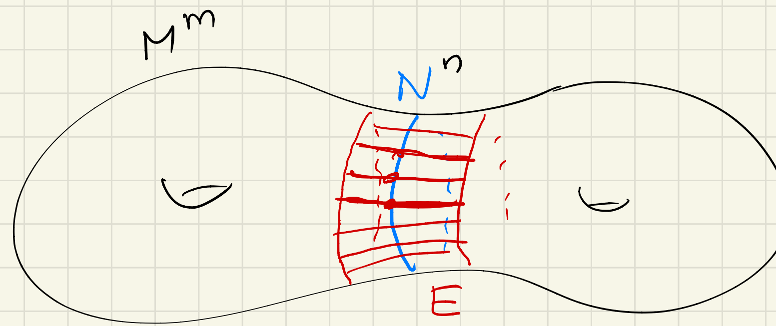
Def: Un INTORNO TUBOLARE per N è

$E \xrightarrow{} N$ fibrato vettoriale con $i : E \hookrightarrow M$ t.c. (embedding)



1) $i|_N = id_N$

2) $i(E)$ aperto.



Oss: $\dim E = \dim M$

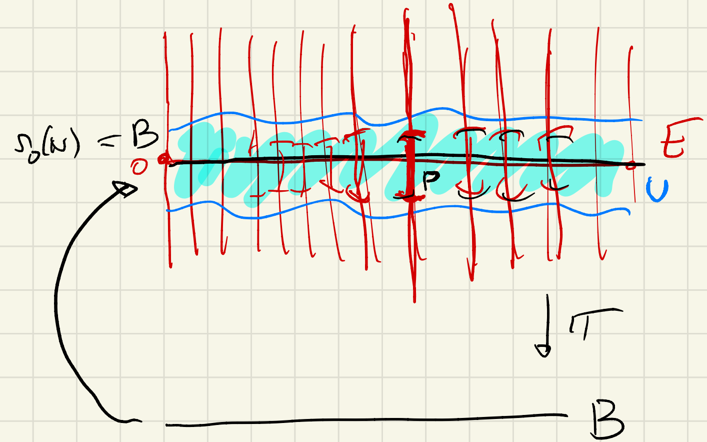
$\dim \nu N = n + (m-n) = m$

Oss: $E \to N$ vettoriale, $s_0 : N \to E$ 0-sezione

$s_0(p) = 0 \in E_p$

Teo: $N^n \subseteq M^m$ ha sempre un intorno tubolare $E \cong \nu N$

Possiamo identificare N con $s_0(N) \subseteq E$



dim:

(a) $M = \mathbb{R}^m$

$N^n \subseteq \mathbb{R}^m$

Ho bisogno di due fatti generali:

Lemma di stizzamento: $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$ fibrato vettoriale. $B \subseteq E$ come 0-sezione

Sia $U \supseteq B$ aperto

$\exists\, g : E \underset{\text{emb.}}{\hookrightarrow} U$ t.c. $g(E_p) \subseteq E_p \ \forall p \in B$ $\quad g|_B = id_B$

dim: Metto una metrica Riem. su E

[Ex: $\exists\ \varepsilon : B \to \mathbb{R}_{>0}$ (LISCIA) t.c. $B(0,\varepsilon(p)) \subseteq E_p$, $B(0,\varepsilon(p)) \subseteq U$] usare partiz 1

$$g(v) = \frac{v}{\sqrt{1+\|v\|^2}}\,\varepsilon(\pi(v)) \quad \text{funzione} \qquad g(E_p) \subseteq B(0,\varepsilon(p))$$

$\square$

Ex: $f : X \to Y$ liscia fra varietà

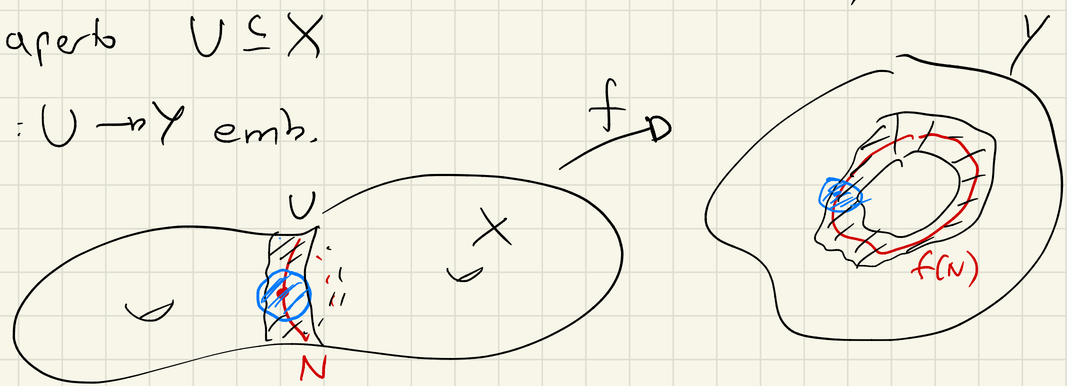
$N \subseteq X$ sottovarietà

1) $f|_N : N \hookrightarrow Y$ embedding

2) f è immersione $\forall x \in N$ cioè $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ iniett.

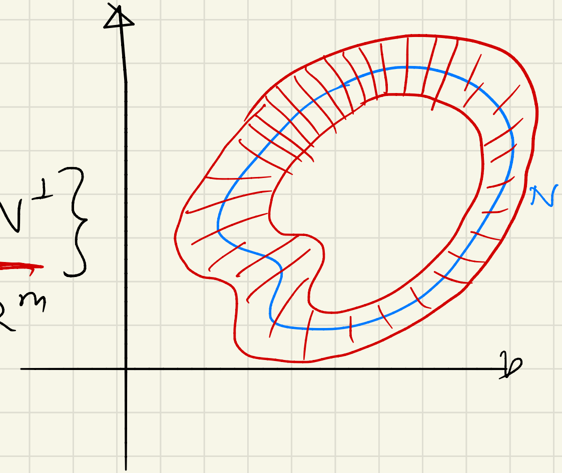
$\Rightarrow \exists\ U \supseteq N$ aperto $U \subseteq X$

t.c. $f|_U : U \to Y$ emb.



$N \subseteq M$ ⓐ $\underline{M = \mathbb{R}^m}$

$$\nu N = \{(p,v) \mid p \in N,\ v \in \nu_p N = T_pN^\perp\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$



$$f : \nu N \to \mathbb{R}^m$$
$$(p,v) \mapsto p+v$$

$p \in N$ $\quad (p,0) \in \nu N$ $\quad T_{(p,0)}\nu N = T_pN \times T_pN^\perp \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$df_{(p,0)} : \underbrace{T_pN \times T_pN^\perp}_{\overset{\|}{\mathbb{R}^m}} \to \mathbb{R}^m \qquad df_{(p,0)} = id$$

$\Rightarrow$ f è immersione in $(p,0)$ $\forall p \in N$

$f|_N$ emb.

$\Big\} \Rightarrow \exists\, N \subseteq U \subseteq \nu N$ t.c. $f|_U : U \to \mathbb{R}^m$ emb.

$f : 2N \to N$

$f|_N = id|_N$

$f|_U : U \to N$ emb.

$N \subseteq U \subseteq 2N$

Lemma strizzamento: $\exists\ i : 2N \to U$ strizzamento

Finisco prendendo

$f \circ i : 2N \hookrightarrow \mathbb{R}^m$

embedding

$\square$

(b) Caso M generale.

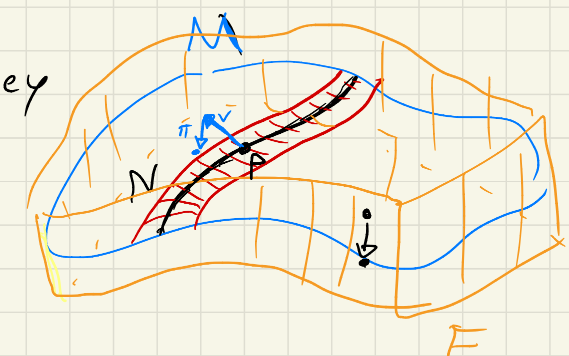
$N^n \subseteq M^m \subseteq \mathbb{R}^N$ per Whitney

1) Prendo intorno tubolare di M in $\mathbb{R}^N$

$M \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^N$

fibrato

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$



$N = 3$

$m = 2$

$n = 1$

$$\nu N \xrightarrow{f} \mathbb{R}^N$$

$$(p,v) \longmapsto p+v$$

$$\begin{tikzcd} U N \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend left, "g"] & E \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

$$(p,v) \longmapsto f'(p+v) \longrightarrow \pi(f'(p+v))$$

νN = fibrato normale di N dentro M (non $\mathbb{R}^N$)

come prima: $df_{(p,0)}$ è iniettivo $\forall p \in N$

1) Voglio $f(\nu N) \subseteq E$ Lo ottengo con uno strizzamento

aperto $U = f^{-1}(E) \subseteq \nu N$ $\quad i : \nu N \to U$ strizzamento

$$f' = f \circ i \Rightarrow \operatorname{Im} f' \subseteq E$$